Automates cellulaires conservateurs

Pour simplifier, on ne va considérer dans ce devoir que des automates cellulaires (AC) de dimension 1 bien que les définitions et résultats se généralisent très bien en dimension quelconque. Par ailleurs, on ne va considérer que des automates dont l'ensemble d'états est un segment initial des entiers naturels. Ainsi, un AC sera représenté par un triplet $\mathcal{A} = (r, q, \delta)$ où

— $r \in \mathbb{N}$ est le rayon du voisinage (le voisinage est donc $V = [\![-r, r]\!]$) ;
— $q \in \mathbb{N}$ est le nombre d'états (l'ensemble d'états est donc $Q = [\![0, q-1]\!]$) ;
— $\delta : Q^V \to Q$ est la règle de transition locale de l'automate.

Définition 1 (FNC)**.** *Un automate cellulaire $\mathcal{A} = (r, q, \delta)$ est* conservateur sur les configurations finies *ssi*

$$\forall c \in \mathcal{C}_F, \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}} c(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}(c)(i)$$

où $\mathcal{C}_F$ désigne l'ensemble des configurations finies, c'est-à-dire les configurations n'ayant qu'un nombre fini de cellules dans un état autre que 0 (cf. question 2 pour la justification que 0 est bien quiescent).

Définition 2 (PNC)**.** *Un automate cellulaire $\mathcal{A}$ est* conservateur sur les configurations périodiques *ssi*

$$\forall c \in \mathcal{C}_P, \quad \sum_{0 \le i < \pi(c)} c(i) = \sum_{0 \le i < \pi(c)} \mathcal{A}(c)(i)$$

où $\mathcal{C}_P$ désigne l'ensemble des configurations périodiques et $\pi(c)$ désigne la taille de la plus petite période de la configuration c.

1 Montrez que les définitions 1 et 2 sont équivalentes (c'est-à-dire qu'un AC est conservateur sur les configurations finies si et seulement si il est conservateur sur les configurations périodiques).

À partir de maintenant on dit qu'un AC est *conservateur* s'il vérifie l'une ou l'autre des définitions 1 et 2.

2 Montrez que si un AC $\mathcal{A} = (r, q, \delta)$ est conservateur alors l'état 0 est *quiescent*, c'est-à-dire que $\delta(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

3 Montrez qu'un AC conservateur est surjectif (toute configuration a un antécédent) si et seulement si il est bijectif sur les configurations finies (toute configuration finie a exactement un antécédent fini).

Théorème 1 (Boccara et Fukś (2000))**.** *Un AC $\mathcal{A} = (r, q, \delta)$ est conservateur ssi pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_{2r+1}) \in Q^{2r+1}$*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2r+1}) = x_1 + \sum_{k=1}^{2r} \left(f(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, x_2, \ldots, x_{2r-k+2}) - f(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, x_1, \ldots, x_{2r-k+1}) \right)$$

4 Montrez le théorème 1.

Indication : Pour montrer que la condition du théorème est nécessaire, vous pouvez considérer une configuration périodique dont la période est constituée de la suite d'états $(x_1, x_2, \ldots, x_{2r+1})$ suivie d'un grand nombre de zéros.

5 Le problème consistant à déterminer si un automate cellulaire en dimension 1 est conservateur est-il décidable ? Justifiez votre réponse.